ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ DUY BÌNH

CÁC METRIC VI PHÂN KOBAYASHI, CARATHEODORY VÀ SIBONY

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ DUY BÌNH

CÁC METRIC VI PHÂN KOBAYASHI, CARATHEODORY VÀ SIBONY

Ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 8.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
PGS. TS PHẠM VIỆT ĐỨC

Thái Nguyên - Năm 2018

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan nội dung trong luận văn Thạc sĩ chuyên ngành Toán giải tích với đề tài **"CÁC METRIC VI PHÂN KOBAYASHI, CARATHEODORY VÀ SIBONY"** được hoàn thành bởi nhận thức của tôi, không trùng lặp với luận văn, luận án và các công trình đã công bố.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2018

Người viết Luận văn

Lê Duy Bình

Xác nhận	Xác nhận
của trưởng khoa chuyên môn	của người hướng dẫn khoa học
	PGS.TS Phạm Việt Đức

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới PGS. TS Phạm Việt Đức, người đã định hướng chọn đề tài và tận tình hướng dẫn, cho tôi những nhận xét quý báu để tôi có thể hoàn thành luận văn.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới các thầy cô giáo dạy cao học chuyên ngành Toán giải tích Trường Đại học sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã giúp đỡ và tạo điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Nhân dịp này tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè đã luôn động viên, cổ vũ, tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình học tập.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2018

Người viết luận văn

Lê Duy Bình

Mục lục

Mở đầu

Lý thuyết các không gian phức hyperbolic được S. Kobayashi đưa ra từ đầu những năm 70, là một trong những hướng nghiên cứu quan trọng của giải tích phức. Trong những năm gần đây, lý thuyết này đã thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trên thế giới. Trong giải tích phức các metric bất biến đóng một vai trò hết sức quan trọng, một số kết quả đã được chứng minh bởi S. Kobayashi, S.G. Krantz, S. Fu, J.E. Fornaess, I. Graham,.... Những công trình nghiên cứu đó đã thúc đẩy một hướng nghiên cứu mới về giải tích phức. Tuy nhiên, nhiều tính chất cơ bản của metric vi phân Kobayashi, Caratheodory và Sibony vẫn ít được biết đến. Mục đích chính của đề tài này là trình bày những kiến thức cơ bản của metric vi phân Kobayashi, metric vi phân Caratheodory và metric vi phân Sibony. Từ đó trình bày kết quả của Fornaess và Lee [2].

Nội dung của đề tài được chia làm 2 chương:

Chương 1 trình bày những kiến thức cơ bản nhất về giả khoảng cách Kobayashi, giả khoảng cách Caratheodory và không gian phức Hyperbolic. Các tính chất của giả khoảng cách Kobayashi, Caratheodory.

Chương 2 trình bày các khái niệm, tính chất, một số mối liên hệ của metric vi phân Kobayashi, metric vi phân Caratheodory và metric vi phân Sibony.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Giả khoảng cách Kobayashi trên không gian phức

1.1.1 Metric Bergman-Poincaré

Metric Bergman-Poincaré trên đĩa đơn vị $\mathbf{D}$ và $\mathbf{D}_r$ được định nghĩa như sau:

$$ds^2 = \frac{4dzd\bar{z}}{\left(1 - |z|^2\right)^2}, \quad \forall z \in \mathbf{D}$$

$$ds_r^2 = \frac{4r^2dzd\bar{z}}{\left(r^2 - |z|^2\right)^2}, \quad \forall z \in \mathbf{D}_r$$

Khi đó, chuẩn của một vectơ tiếp xúc sinh bởi metric Bergman-Poincaré trên $\mathbf{D}$ và $\mathbf{D}_r$ được xác định bởi:

Với $z \in \mathbf{D}$ (hoặc $z \in \mathbf{D}_r$) và $v \in T_z\mathbf{D}$ (hoặc $v \in T_z\mathbf{D}_r$) là vectơ tiếp xúc tại z, ta có

$$|v|_{hyp,z} = \frac{2|z|_{euc}}{1 - |z|^2}$$

$$|v|_{hyp,r,z} = \frac{2|z/r|_{euc}}{1 - |z/r|^2}$$

trong đó $|v|_{hyp,z}$ là chuẩn Euclide trên $\mathbb{C}$ Các chuẩn $|v|_{hyp,z}$ và $|v|_{hyp,r,z}$ được gọi là chuẩn hyperbolic trên $\mathbf{D}$, $\mathbf{D}_r$ tương ứng.

1.1.2 Bổ đề (Schwarz-Pick)

Giả sử $f : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ *là ánh xạ chỉnh hình từ đĩa đơn vị vào chính nó. Khi đó:*

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Chứng minh. Lấy a cố định thuộc $\mathbf{D}$. Đặt

$$g(z) = \frac{z + a}{1 + \bar{a}z} \text{ và } h(z) = \frac{z - f(a)}{1 - \overline{f(a)}z}.$$

Khi đó g và h là các tự đẳng cấu của đĩa, biến 0 thành a và $f(a)$ thành 0 tương ứng. Đặt

$$F = h \circ f \circ g.$$

Ta có $f : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ là chỉnh hình, $F(0) = 0$ và

$$F'(0) = h'(f(a))f'(a)g'(0) = \frac{1 - |a|^2}{1 - |f(a)|^2} f'(a).$$

Theo bổ đề Schwarz, ta có

$$|F'(0)| \leq 1$$

và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi F là tự đẳng cấu, tức là khi và chỉ khi f là tự đẳng cấu. Từ đó ta có

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Bổ đề được chứng minh. □

1.1.3 Khoảng cách Bergman-Poincaré

Khoảng cách sinh bởi metric Bergman-Poincaré trên đĩa đơn vị $\mathbf{D}$, ký hiệu là $\rho_{\mathbf{D}}$ được gọi là khoảng cách Bergman-Poincaré. Sử dụng định nghĩa khoảng cách sinh bởi làm độ dài là chuẩn hyperbolic trên đĩa đơn vị mở $\mathbf{D}$, ta có thể xác định công thức của khoảng cách Bergman-Poincaré như sau: Lấy $a \in \mathbf{D}, 0 < a < 1$.Gọi $z(t) = x(t) + iy(t),\ \ 0 \leq t \leq 1$, là đường cong trong $\mathbf{D}$ nối điểm gốc $0 \in \mathbf{D}$ với $a \in \mathbf{D}$. Khi đó độ dài cung nối ứng với chuẩn hyperbolic sẽ thỏa mãn

$$\begin{aligned}
\ell &= \int\limits_0^1 |z'(t)|_{hyp} dt = \int\limits_0^1 \tfrac{2|z'(t)|}{1-|z(t)|^2} dt \\
&= \int\limits_0^1 \tfrac{2(x'(t)^2+y'(t)^2)^{1/2}}{1-x(t)^2-y(t)^2} dt \geq \int\limits_0^1 \tfrac{2|x'(t)|}{1-|x(t)|^2} dt \\
&\geq \int\limits_o^a \tfrac{2dx}{1-x^2} = \ln \tfrac{1+a}{1-a}.
\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ rằng đoạn thẳng nối từ 0 đến a là đường nối ngắn nhất và

$$\rho_{\mathbf{D}}(0,a) = \ln \frac{1+a}{1-a},$$

khi đó khoảng cách Bergman-Poincaré là bất biến qua các phép quay, ta có

$$\rho_{\mathbf{D}}(0,a) = \ln \frac{1+|a|}{1-|a|}, \forall a \in \mathbf{D},$$

Lấy hai điểm $a, b \in \mathbf{D}$, phép biến đổi w $= \frac{z-b}{1-\bar{b}z}$ là một tự đẳng cấu của $\mathbf{D}$ mà biến b thành 0 và biến a thành $\frac{a-b}{1-a\bar{b}}$. Khi đó ta nhận được

$$\rho_{\mathbf{D}}(a,b) = \ln \frac{1+\left|\frac{a-b}{1-\bar{b}a}\right|}{1-\left|\frac{a-b}{1-\bar{b}a}\right|}, \forall a, b \in \mathbf{D}.$$

1.1.4 Giả khoảng cách nội tại

Gải sử X là một tập, giả khoảng cách d trên X là một hàm $X \times X$ với $p, q, r \in \mathbb{R}^+$ thỏa mãn các điều kiện:

i) $d(p,q) = 0, \qquad$ nếu $p = q$;